

Soit q la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

On pose $E = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad q(f(x)) = q(x)\}$.

- 1) Montrer que (E, \circ) est un groupe.
- 2) Montrer que $\det f = \pm 1$ pour tout $f \in E$.
- 3) On suppose que $f \in E$ et l'on note $M = (a_{ij})$ la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
Montrer l'inégalité $a_{33}^2 \geq 1$.

Solution :

Exercice : Soit q la forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

On pose $E = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) / \forall u \in \mathbb{R}^3 \quad q(f(u)) = q(u)\}$

1°/ Montrer que (E, \circ) est un groupe

2°/ Montrer que si $f \in E$, on a : $\det f = \pm 1$

3°/ Si $M = (a_{ij})$ désigne la matrice de $f \in E$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , montrer que $a_{33}^2 \geq 1$

Solution :

1°/ * f bijective ?

$$q(f(u)) = q(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow b(f(u), f(v)) = b(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3$$

où b est la forme bilinéaire symétrique associée à q

$$(cf. \quad b(u, v) = \frac{1}{2} (q(u+v) - q(u) - q(v)))$$

Si $f(u) = 0$, alors $b(u, v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$, et comme b est non dégénérée (car la matrice de q est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est aussi la matrice de $\tilde{b} : u \mapsto b_u / b_u(v) = b(u, v)$ dans les bases canoniques) on aura $u = 0$. Donc f sera injective, ie bijective (c'est un endomorphisme!).

CPF)

* (E, \circ) groupe se montre alors sans peine

2°/ En notant X la matrice-colonne u , M la matrice de f et B la matrice de q (dans (e_1, e_2, e_3)), $q(f(u)) = q(u)$ s'écrit :

$${}^t(MX) B (MX) = {}^t X B X$$

$${}^t X {}^t M B M X = {}^t X B X \quad \forall X \quad (*)$$

$$\text{d'où} \quad {}^t M B M = B$$

$$\underbrace{\det({}^t M)}_{=\det M} \cdot \det B \cdot \det M = \underbrace{\det B}_{=-1} \Rightarrow (\det M)^2 = 1 \Leftrightarrow \det M = \pm 1. \text{ ouai}$$

3°/ $f(e_3) = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3$, donc :

$$q(f(e_3)) = a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 = q(e_3) = -1$$

$$\text{et l'on obtient} \quad a_{33}^2 = 1 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \geq 1 \quad \text{ouai}$$

(*) Généralisation

$$b(f(u), f(v)) = b(u, v) \quad \forall u, v$$

au 1°, d'où :

$${}^t X {}^t M B M Y = {}^t X B Y \Rightarrow {}^t M B M = B \quad (1)$$

(1) facile à vérifier car

$${}^t X B Y = \sum a_{ij} x_i y_j \text{ si } B = (a_{ij})$$

et nous avons l'égalité de 2 polynômes en x_i et y_i ...

Exercice : Procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

Soit E un espace vectoriel euclidien sur \mathbb{R} . On note $u \cdot v$ le produit scalaire sur E .

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Montrer qu'il existe une et une seule base orthonormée (f_1, \dots, f_n) de E telle que, pour tout $i = 1, \dots, n$, on ait :

- 1) le s.e.v. engendré par (e_1, \dots, e_i) est égal au s.e.v. engendré par (f_1, \dots, f_i) ,
- 2) $e_i \cdot f_i > 0$

Application : Soit q la forme quadratique sur \mathbb{R}^3 définie par :

$$q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$.

On note b la forme bilinéaire symétrique associée à q . Montrer que E muni de b est un espace euclidien, puis orthonormaliser la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 grâce au procédé de Schmidt.

Solution :

* Notons F_i le s.e.v. engendré par e_1, \dots, e_i

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \in F_1$$

$f_2 \in F_2 \cap F_1^\perp$, or $F_2 + F_1^\perp = E$ (facile), donc

$$\text{on a : } \dim F_2 \cap F_1^\perp = \dim F_2 + \dim F_1^\perp - n = 2 + (n-1) - n = 1.$$

On aura 2 possibilités pour le choix du vecteur unitaire f_2 de la droite vect. $F_2 \cap F_1^\perp$, et un seul vérifiera la condition $e_2 \cdot f_2 > 0$. On le prend.

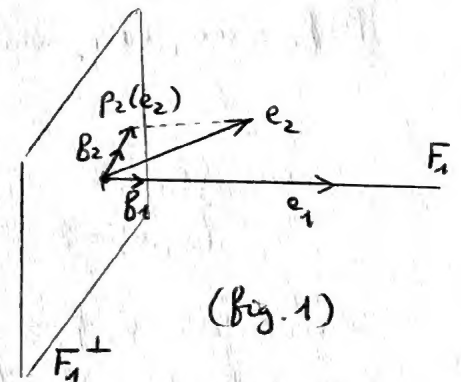
....

$f_i \in F_i \cap F_{i-1}^\perp$, et $F_i + F_{i-1}^\perp = E$ donc : (comme précédemment)

$$\dim F_i \cap F_{i-1}^\perp = \dim F_i + \dim F_{i-1}^\perp - n = i + (n-i+1) - n = 1$$

Il y aura 2 vecteurs unitaires (opposés!) sur la droite vect. $F_i \cap F_{i-1}^\perp$. On choisira celui f_i qui vérifiera $e_i \cdot f_i > 0$.

L'existence et l'unicité de (f_1, \dots, f_n) s'en déduit.



Interprétation géométrique : $f_i = \frac{p_i(e_i)}{\|p_i(e_i)\|}$ où p_i est la projection orthogonale sur F_{i-1}^\perp .

* Application : $b(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + (x_1y_3 + x_3y_1) + (2x_1y_2 + 2x_2y_1) + (x_2y_3 + x_3y_2)$

Mat $b = B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2, e_3)

1) (E, b) est euclidien puisque, par la méthode de Gauss, on obtient :

$$q(x) = 3\left(x_1 + \frac{x_3 + 2x_2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_2 + \frac{x_3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}x_3^2$$

ce qui prouve que la forme bil. symétrique b est positive ($q(x) \geq 0 \forall x$). Comme elle est évidemment non dégénérée (cf $\det B \neq 0$), ce qui équivaut à définir (sous l'hypothèse positive), on aura bien : $b = \beta.b.$ sym. définie positive, c'est un produit scalaire.

2) Orthonormalisation de (e_1, e_2, e_3) :

$$\alpha) \beta_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \boxed{\frac{e_1}{\sqrt{3}}} \quad \text{car } \|e_1\| = \sqrt{e_1^2} = \sqrt{3}$$

$$\beta) \beta_2 = ae_1 + be_2 \text{ vérifie : } \begin{cases} \beta_2 \cdot e_1 = 0 \\ \|\beta_2\|^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae_1^2 + be_1 \cdot e_2 = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b = 0 \\ 3a^2 + 2b^2 + 4ab = 1 \end{cases}$$

$$\text{car } \begin{cases} e_1^2 = 3 \\ e_1 \cdot e_2 = 2 \end{cases} \quad \text{On trouve alors : } \begin{cases} b = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \\ a = \mp \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

La condition $e_2 \cdot \beta_2 > 0 \Leftrightarrow ae_1 \cdot e_2 + be_2^2 > 0 \Leftrightarrow 2a + 2b > 0 \Leftrightarrow a + b > 0$ impose le choix $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Ainsi $\boxed{\beta_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}e_1 + \sqrt{\frac{3}{2}}e_2}$

3) $\beta_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$ vérifie :

$$\begin{cases} e_1 \cdot \beta_3 = 0 \\ e_2 \cdot \beta_3 = 0 \\ \beta_3^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae_1^2 + be_1 \cdot e_2 + ce_1 \cdot e_3 = 0 \\ ae_1 \cdot e_2 + be_2^2 + ce_2 \cdot e_3 = 0 \\ \beta_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 2a + 2b + c = 0 \\ 3a^2 + 2b^2 + c^2 + 2ac + 4ab + 2bc = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 + c^2 + 2bc = 1 \Leftrightarrow b = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{car } \begin{cases} e_1 \cdot e_3 = 1 \\ e_2^2 = 2 \\ e_2 \cdot e_3 = 1 \end{cases}$$

La condition $e_3 \cdot \beta_3 > 0 \Leftrightarrow ae_1 \cdot e_3 + be_2 \cdot e_3 + ce_3^2 > 0 \Leftrightarrow a + b + c > 0$ impose le choix $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\boxed{\beta_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_2 + \sqrt{2}e_3}$